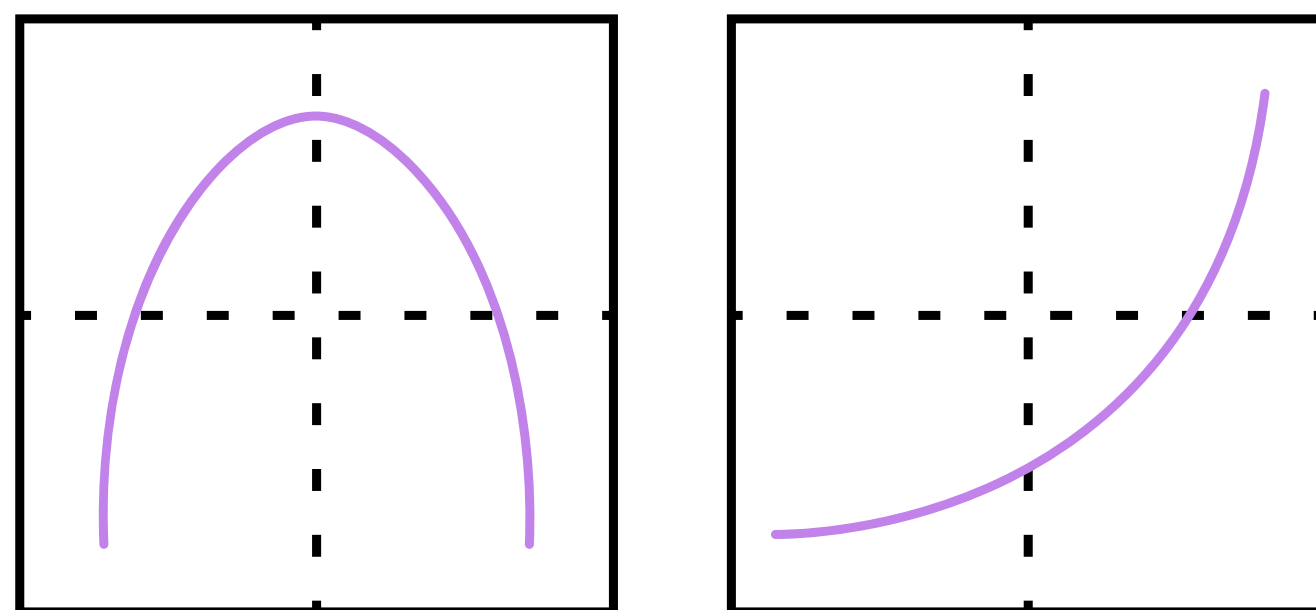


UKŁADY DYNAMICZNE - MODEL PANDEMICZNY

EWA MOTOSZKO, NATALIA KOWALCZYK, FILIP FICEK

WPROWADZENIE

Równania różniczkowe są podstawowym językiem, opisującym większość znanych zjawisk w różnych dziedzinach nauki - w tym analizowane przez nas modele matematyczne, badane metodami układów dynamicznych.



CELE I MATERIAŁY

Celem projektu było zbudowanie prostego modelu opisującego rozwój pandemii oraz analiza występujących w tym modelu zjawisk. Głównym narzędziem była pochodna funkcji oraz jej geometryczna i fizyczna interpretacja. Do analizy stworzonego modelu posłużyliśmy się teorią bifurkacji, czyli skokowych zmian zachowania przy ciągłych zmianach parametrów modelu, oraz programem GeoGebra, użytym do wizualizacji powstałych funkcji.

MODEL

W naszym modelu został przeanalizowany schemat epidemii bez przypadków ozdowieńców. Przykładami epidemii oraz pandemii w historii, które spełniają nasz model, są Ebola, AIDS, Choroba Heinego-Medina oraz wczesne fale Covid-19. Wszystkie te choroby zostały wywołane zakażeniem danym wirusem. Budując nasz model pandemii, wyróżniliśmy trzy grupy ludzi: zdrowych, chorych oraz zmarłych.

$$\begin{cases} x' = -k_1xy \\ y' = -k_2y + k_1xy \\ z' = k_2y \end{cases} \quad \begin{array}{l} x - \text{liczba zdrowych} \\ y - \text{liczba chorych} \\ z - \text{liczba zmarłych} \\ k_1 - \text{wskaźnik zachorowań} \\ k_2 - \text{wskaźnik umieralności} \\ N_0 = x + y + z \quad N_0 - \text{cała grupa badawcza} \end{array}$$

Powyższy układ da się zredukować do pojedynczego równania różniczkowego, zależnego od dwóch parametrów.

$$u' = A - Bu - e^{-u} \quad u = \frac{k_1}{k_2}z$$

u - przeskalowana liczba zmarłych

Parametry A oraz B są wynikiem przekształceń stałych z poprzednich równań.

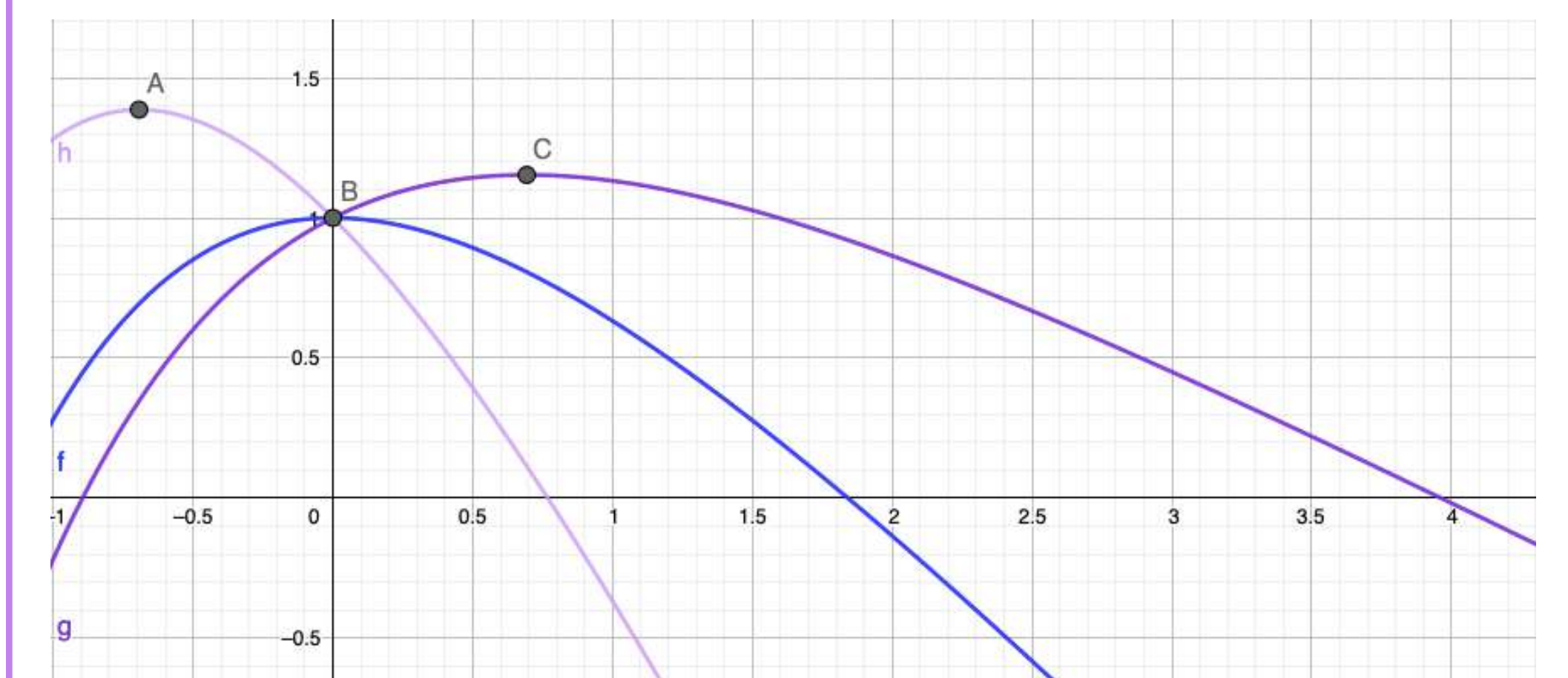
$$A = \frac{N_0}{x_0} \quad B = \frac{k_2}{k_1 x_0}$$

x_0 - początkowa liczba zdrowych osób

Przyjmujemy, że parametry równania w tym modelu są dodatnie. Co więcej, żeby doszło do wybuchu pandemii, parametr A musi być większy od 1. Jej całkowity przebieg będzie zależał od parametru B .

ANALIZA

Gdy modelowany przebieg pandemii rozpoczyna się od jednej lub więcej osób zakażonych, możliwe są dwa przypadki. Są one zależne od wartości parametru B . Jeśli jest większy lub równy jeden, to z graficznego przedstawienia modelu wynika, że populacja jest lub była już w krytycznym punkcie pandemii. Wówczas sytuacja z biegiem czasu będzie się polepszać aż do całkowitego pokonania choroby. Jednak jeśli parametr B będzie mniejszy od jeden, sytuacja będzie się pogarszać aż do osiągnięcia punktu krytycznego, po którym tempo śmierci będzie spadać.



Wykresy zależności u' od u dla (f) $B=1$, (g) $B < 1$, (h) $B > 1$.

PODSUMOWANIE

Na podstawie naszego modelu mogliśmy zauważyć, że przebieg pandemii i jej rozwój zależy od śmiertelności oraz zachorowalności wirusa, który spowodował wybuch pandemii. Model ten został po raz pierwszy zaproponowany w pracy Kermack, McKendrick (1927).

