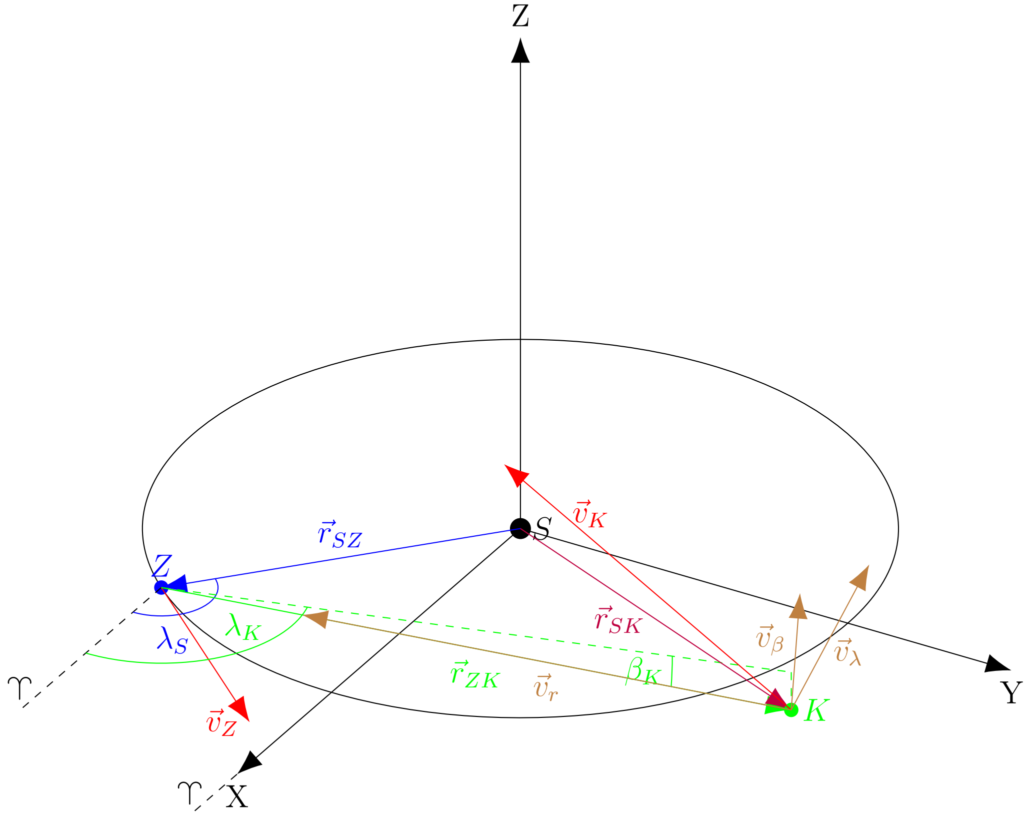



Rozwiązanie z reguły najlepiej zacząć od dobrego rysunku rozważanej sytuacji, takiego chociażby jak ten powyżej. Następnie należy się zastanowić, co musimy wzynaczyć po drodze, by dojść do rozwiązania problemu. W zadaniu należy policzyć elongację komety w momencie jej przejścia przez peryhelium. Aby to zrobić, niezbędne jest określenie położenia punktu peryhelium w przestrzeni, jak również położenia Ziemi w tejże chwili czasu. Peryhelium możemy określić dzięki znajomości wektorów położenia i prędkości komety w pewnej chwili czasu, gdyż wektory te wyznaczają płaszczyznę ruchu komety, jak również pozwalają określić rozmiar orbity, po której okrąża ona Słońce. Następnie dzięki określeniu odległości kątowej między peryhelium a aktualnym położeniem będzie można z II prawa Keplera wyznaczyć czas, po którym to przejście nastąpi. Mając ten czas, można łatwo policzyć wektor położenia Ziemi w momencie przejścia komety przez peryhelium i tym samym szukaną elongację mniejszego ciała.

Rozwiązanie zaczniemy od wprowadzenia kartezjańskiego układu współrzędnych, początek znajduje się w Słońcu, oś X wskazuje na punkt Barana, zaś oś Z na północny biegun ekliptyczny – wtedy płaszczyzna XY pokrywa się z płaszczyzną orbity Ziemi wokół Słońca. Bazując na rysunku, chcemy wyznaczyć wektory $\vec{r}_{SK}$ oraz $\vec{v}_K$.

Zacznijmy od znalezienia wektora położenia komety. Na podstawie rysunku można zauważyć, że wektor $\vec{r}_{SK}$ jest sumą wektorów $\vec{r}_{SZ}$ oraz $\vec{r}_{ZK}$. Wektor $\vec{r}_{SZ}$ ma znaną długość równą 1 AU, leży w płaszczyźnie ekliptyki oraz tworzy z osią X kąt $-(180° - \lambda_S)$ ($\lambda_S = 138°10'23.3''$ w dniu 11 sierpnia 2023 w południe czasu polskiego), zatem jego współrzędne w układzie kartezjańskim wynoszą

$$\vec{r}_{SZ} = r_{SZ}[-\cos(\lambda_S); -\sin(\lambda_S); 0]$$

Położenie komety względem ziemi jest natomiast określone w sferycznym układzie współrzędnych poprzez wielkości $D$, $\beta_K$ oraz $\lambda_K$. Przejście z układu sferycznego na kartezjański odbywa się następująco:

$$\vec{r}_{ZK} = D[\cos(\beta_K)\cos(\lambda_K); \cos(\beta_K)\sin(\lambda_K); \sin(\beta_K)]$$

Wektor $\vec{r}_{SK}$ wynosi zatem

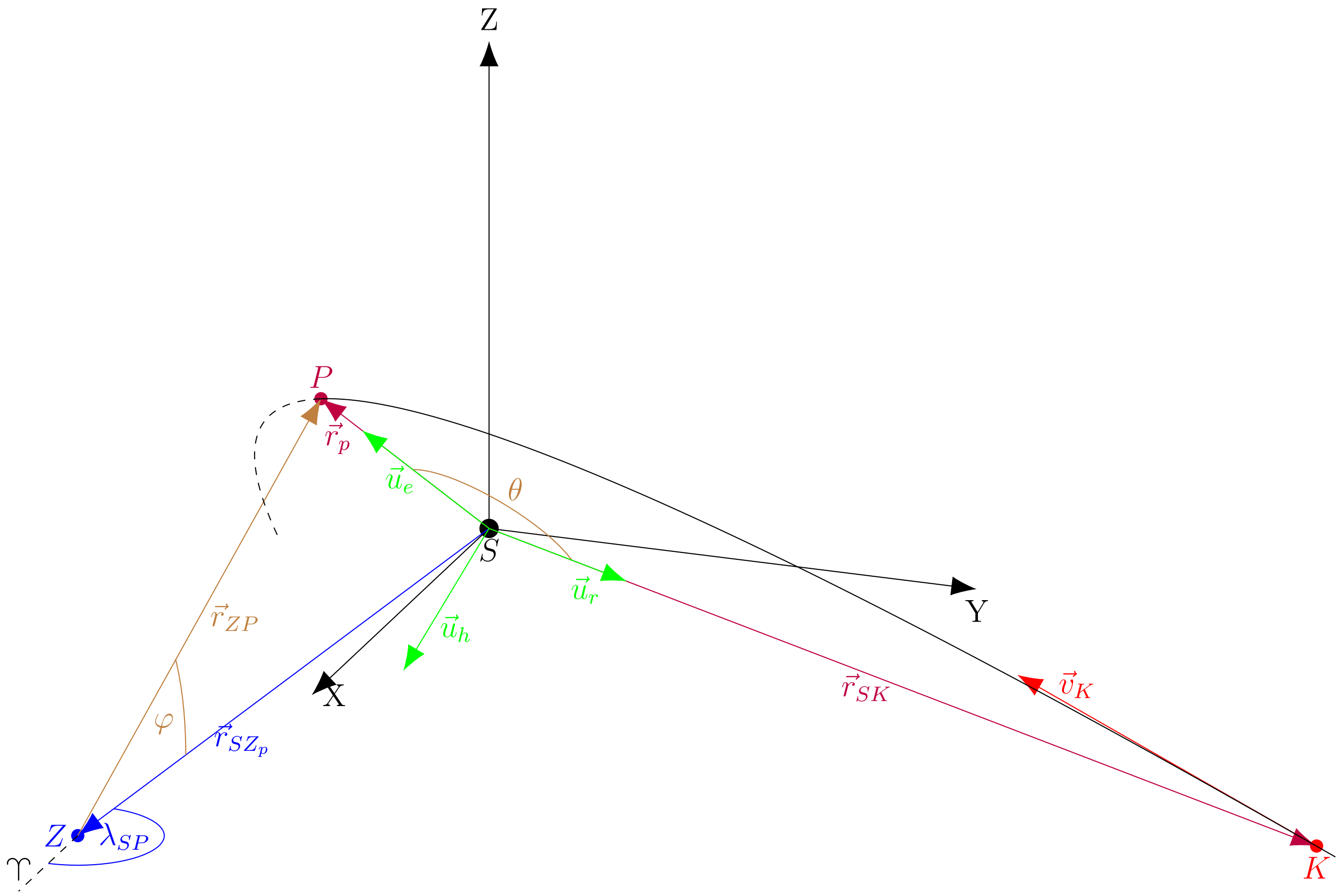
$$\vec{r}_{SK} = \vec{r}_{SZ} + \vec{r}_{ZK}$$

Długość wektora $\vec{r}_{SK}$ wyznaczamy z twierdzenia Pitagorasa.

Wyznaczenie $\vec{v}_K$ jest nieco bardziej problematyczne, gdyż w zadaniu mamy podane niebezpośrednio aż trzy niezależne informacje o ruchu komety względem Ziemi, mianowicie o prędkościach oznaczonych na rysunku $\vec{v}_r$, $\vec{v}_\beta$ oraz $\vec{v}_\lambda$, których składowe należy wyznaczyć w układzie kartezjańskim i dodać do siebie, by dostać wektor prędkości komety względem Ziemi $\vec{v}_{KZ}$. Ostatni wektor jest niczym innym jak różnicą wektorów $\vec{v}_K$ i $\vec{v}_Z$, co implikuje, że $\vec{v}_K = \vec{v}_{KZ} + \vec{v}_Z$. Poniżej znajdują się rozpisane wszystkie niezbędne nam wektory prędkości, ewentualny dowód tego, że mają one właśnie taką postać, pozostawiam Czytelnikowi. Wartość prędkości Ziemi w ruchu Słońca można wyznaczyć ze wzoru na ruch po okręgu albo znaleźć w internecie, $v_Z = 29{,}78\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

$$\vec{v}_r = v_r[\cos(\beta_K)\cos(\lambda_K); \cos(\beta_K)\sin(\lambda_K); \sin(\beta_K)]$$
$$\vec{v}_\beta = \omega_\beta D[-\sin(\beta_K)\cos(\lambda_K); -\sin(\beta_K)\sin(\lambda_K); \cos(\beta_K)]$$
$$\vec{v}_\lambda = \omega_\lambda D\cos(\beta_k)[-\sin(\lambda_K); \cos(\lambda_K); 0]$$
$$\vec{v}_{KZ} = \vec{v}_r + \vec{v}_\beta + \vec{v}_\lambda$$
$$\vec{v}_Z = v_Z[\sin(\lambda_S); -\cos(\lambda_S); 0]$$

Zanim przejdziemy do dalszych obliczeń, warto wykonać rysunek obrazujący ewolucję sytuacji. Na obrazku poniżej czarna krzywa przedstawia trajektorię, którą kometa pokonuje do osiągnięcia peryhelium, $\theta$ – jej anomalia prawdziwa w chwili początkowej, $P$ – punkt peryhelium, $\varphi$ – szukana elongacja, $\lambda_{SP}$ – długość ekliptyczna Słońca w momencie przejścia komety przez peryhelium.




Znając położenie i prędkość komety względem Słońca, można policzyć jej całkowitą energię mechaniczną oraz moment pędu na jednostkę masy, oznaczony dalej jako $\vec{h}$. Z zasady zachowania energii mamy

$$\frac{v_K^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r_{SK}} = -\frac{GM_\odot}{2a}$$

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r_{SK}} - \frac{v_K^2}{GM_\odot}}$$

Moment pędu jest zdefiniowany jako iloczyn wektorowy wektorów położenia i prędkości, zatem

$$\vec{h} = \vec{r}_{SK} \times \vec{v}_K = [r_{SK_Y} v_{K_Z} - r_{SK_Z} v_{K_Y}; r_{SK_Z} v_{K_X} - r_{SK_X} v_{K_Z}; r_{SK_X} v_{K_Y} - r_{SK_Y} v_{K_X}]$$

Z momentu pędu można wyznaczyć mimośród orbity komety, gdyż obowiązuje zależność

$$h = \sqrt{GM_\odot a(1-e^2)}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{GM_\odot a}}$$

Mamy wielką półoś, mamy mimośród, możemy zatem wyznaczyć odległość komety od Słońca w peryhelium:

$$r_p = a(1-e)$$

Nadal potrzebujemy jednak wektora określającego położenie przestrzenne peryhelium, jak również czasu do przejścia komety przez nie. Do wyznaczenia pierwszej z tych rzeczy można użyć gotowej formuły (hasło wyszukiwania w Google: "eccentricity vector"), albo zauważyć, że wektor ten leży w płaszczyźnie orbity, zatem jest prostopadły do wektora momentu pędu komety, jak również tworzy z wektorem położenia komety kąt równy anomalii prawdziwej, do znalezienia której dysponujemy potrzebnymi danymi. Oznaczmy ten wektor wskazujący od Słońca do peryhelium orbity przez $\vec{u}_e$ i załóżmy, że ma on długość 1, wtedy $\vec{r}_p = r_p \vec{u}_e$. Dodatkowo wprowadźmy jednostkowe wektory $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}_{SK}}{r_{SK}}$oraz $\vec{u}_h = \frac{\vec{h}}{h}$, skierowane odpowiednio wzdłuż wektorów $\vec{r}_K$ oraz $\vec{h}$.

Z własności iloczynu skalarnego wektorów wiemy, że $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_e = \cos(\theta)$. Ponadto zauważmy, że wektory $\vec{u}_r$ i $\vec{u}_e$ leżą w płaszczyźnie orbity, zatem wektor będący wynikiem ich iloczynu wektorowego jest do niej prostopadły, a tym samym równoległy do wektora $\vec{u}_h$. Ponadto długość wektora $\vec{u}_r \times \vec{u}_e$ z własności iloczynu wektorowego wynosi $\sin(\theta)$, z czego możemy wywnioskować, że $\vec{u}_r \times \vec{u}_e = \vec{u}_h \sin(\theta)$. Razem z równaniem na iloczyn skalarny daje to układ 4 równań do rozwiązania:

$$\begin{cases} -u_{r_Z} u_{e_Y} + u_{r_Y} u_{e_Z} = u_{h_X} \sin(\theta) \\ u_{r_Z} u_{e_X} - u_{r_X} u_{e_Z} = u_{h_Y} \sin(\theta) \\ -u_{r_Y} u_{e_X} + u_{r_X} u_{e_Y} = u_{h_Z} \sin(\theta) \\ u_{r_X} u_{e_X} + u_{r_Y} u_{e_Y} + u_{r_Z} u_{e_Z} = \cos(\theta) \end{cases}$$

Mogłoby się wydawać, że mamy aż 4 równania, a tylko 3 niewiadome, więc otrzymany układ równań jest sprzeczny, jednak pierwsze 3 równania wynikające z iloczynu wektorowego są liniowo zależne, tzn. dowolne z nich można przedstawić jako kombinację liniową dwóch pozostałych. Niezależne równania są de facto 3, a ich rozwiązanie wygląda następująco (dowód pozostawiam Czytelnikowi):

$$\begin{cases} u_{e_X} = (u_{r_Z} u_{h_Y} - u_{r_Y} u_{h_Z}) \sin(\theta) + u_{r_X} \cos(\theta) \\ u_{e_Y} = (-u_{r_Z} u_{h_X} + u_{r_X} u_{h_Z}) \sin(\theta) + u_{r_Y} \cos(\theta) \\ u_{e_Z} = (u_{r_Y} u_{h_X} - u_{r_X} u_{h_Y}) \sin(\theta) + u_{r_Z} \cos(\theta) \end{cases}$$

Anomalię prawdziwą obliczamy z równania elipsy w układzie biegunowym o środku w jej ognisku:

$$r_{SK} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta)}$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{a(1-e^2)}{r_{SK}e} - \frac{1}{e}\right)$$

Możemy teraz podstawić wyliczoną wartość $\theta$ do wzorów na składowe wektora $\vec{u}_e$ i wyznaczyć położenie peryhelium w przestrzeni. Zostaje zatem ostatni akcent, czyli wyznaczenie czasu do przejścia komety przez peryhelium. Można w tym celu skorzystać z II prawa Keplera, wyznaczając uprzednio pole wycinka elipsy o kącie $\theta$ i środku w jej ognisku (da się to zrobić bez całkowania, jeśli zauważy się fakt, że elipsa to okrąg o promieniu $a$ spłaszczony w jednej osi o czynnik $\sqrt{1-e^2}$). My jednak w tym celu posłużymy się związkami jakie zachodzą między anomaliami: prawdziwą $\theta$, mimośrodową $E$ oraz średnią $M$. Związki te są bezpośrednią konsekwencją II prawa Keplera oraz relacji geometrycznych między elipsą a opisanym na niej okręgiem. Anomalię średnią definuje się jako $M = \frac{2\pi}{T}\Delta t_p$, gdzie $T$ to okres obiegu ciała niebieskiego, zaś $\Delta t_p$ odstęp czasu między chwilą obecną a momentem przejścia przez peryhelium. Anomalię średnią z mimośrodową wiąże tzw. równanie Keplera (wartości kątów muszą być podane w radianach):

$$M = E - e\sin(E)$$

Z kolei anomalia mimośrodowa jest powiązana z prawdziwą następującą relacją

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Następnie wyznaczone $E$ podstawiamy równania Keplera, by otrzymać wartość anomalii średniej. Do wyznaczenia $\Delta t_p$ potrzeba nam zatem jeszcze okresu obiegu komety wokół Słońca, który obliczamy z III prawa Keplera:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1\text{AU}^3}{1\ \text{rok}^2}$$

Ponieważ założyliśmy, że orbita Ziemi jest kołowa, w momencie przejścia komety przez peryhelium, długość ekliptyczna Słońca będzie wynosić

$$\lambda_{SP} = \lambda_S + \frac{\Delta t_p}{T_Z} \cdot 360^\circ$$

Wektor położenia Ziemi względem Słońca w tej chwili wynosi więc

$$\vec{r}_{SZ_p} = r_{SZ}[-\cos(\lambda_{SP}); -\sin(\lambda_{SP}); 0]$$

Relacja pomiędzy wektorami, z której możemy wyznaczyć położenie komety w peryhelium względem Ziemi, wygląda podobnie jak na początku rozwiązania. Wtedy zachodziła relacja $\vec{r}_{SK} = \vec{r}_{SZ} + \vec{r}_{ZK}$, natomiast teraz mamy

$$\vec{r}_p = \vec{r}_{SZ_p} + \vec{r}_{ZP}$$

Kąt elongacji $\varphi$ jest kątem pomiędzy wektorem $\vec{r}_{ZP}$ oraz wektorem przeciwnym do wektora $\vec{r}_{SZ_p}$, czyli $-\vec{r}_{SZ_p}$. Oba wektory znamy, zatem kąt $\varphi$ można wyliczyć np. z własności iloczynu skalarnego.

$$\vec{r}_{ZP} \cdot (-\vec{r}_{SZ_p}) = -r_{ZP_X} r_{SZ_pX} - r_{ZP_Y} r_{SZ_pY} - r_{ZP_Z} r_{SZ_pZ} = r_{ZP} r_{SZ}\cos(\varphi)$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{-r_{ZP_X} r_{SZ_pX} - r_{ZP_Y} r_{SZ_pY} - r_{ZP_Z} r_{SZ_pZ} = r_{ZP} r_{SZ}}{r_{ZP} r_{SZ}}\right)$$