

## WSTĘP

Wahadło podwójne jest jednym z układów dynamicznych, które mimo swojej prostoty wykazują bardzo skomplikowane i trudne do zbadania zachowania.

W naszym projekcie zajęliśmy się ich opisem i analizą.

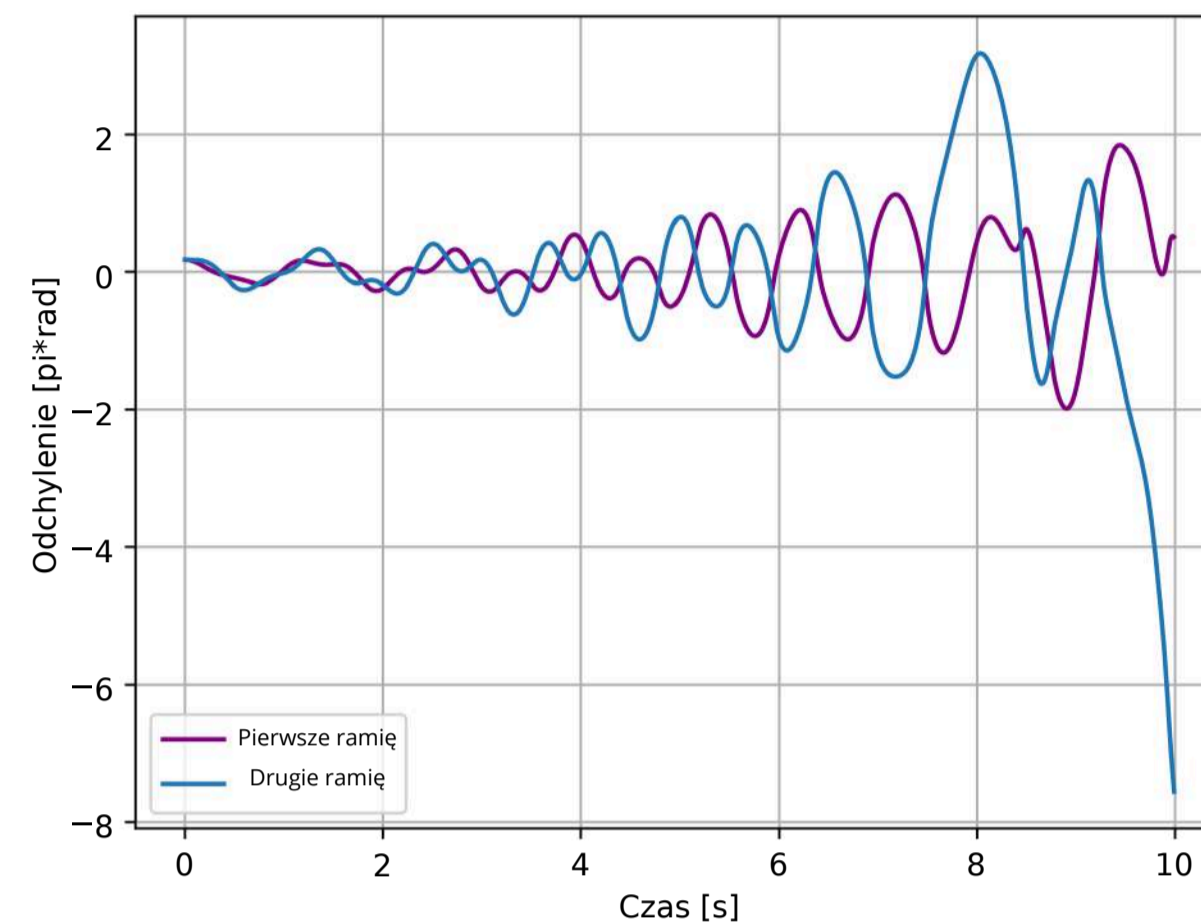
## METODOLOGIA

Symulacje zostały zaprogramowane w języku Python. W celu rozwiązania równań ruchu skorzystaliśmy z rachunku pochodnych oraz algorytmów Eulera i Rungego-Kutty 4 rzędu, porównując ich dokładność na wykresach położenia i energii układu. Na koniec przeanalizowaliśmy sposób zachowania wahadła w zależności od jego odchylenia początkowego na diagramie bifurkacji. Wykonaliśmy również fizyczny model wahadła podwójnego, by porównać wynik symulacji z rzeczywistością.

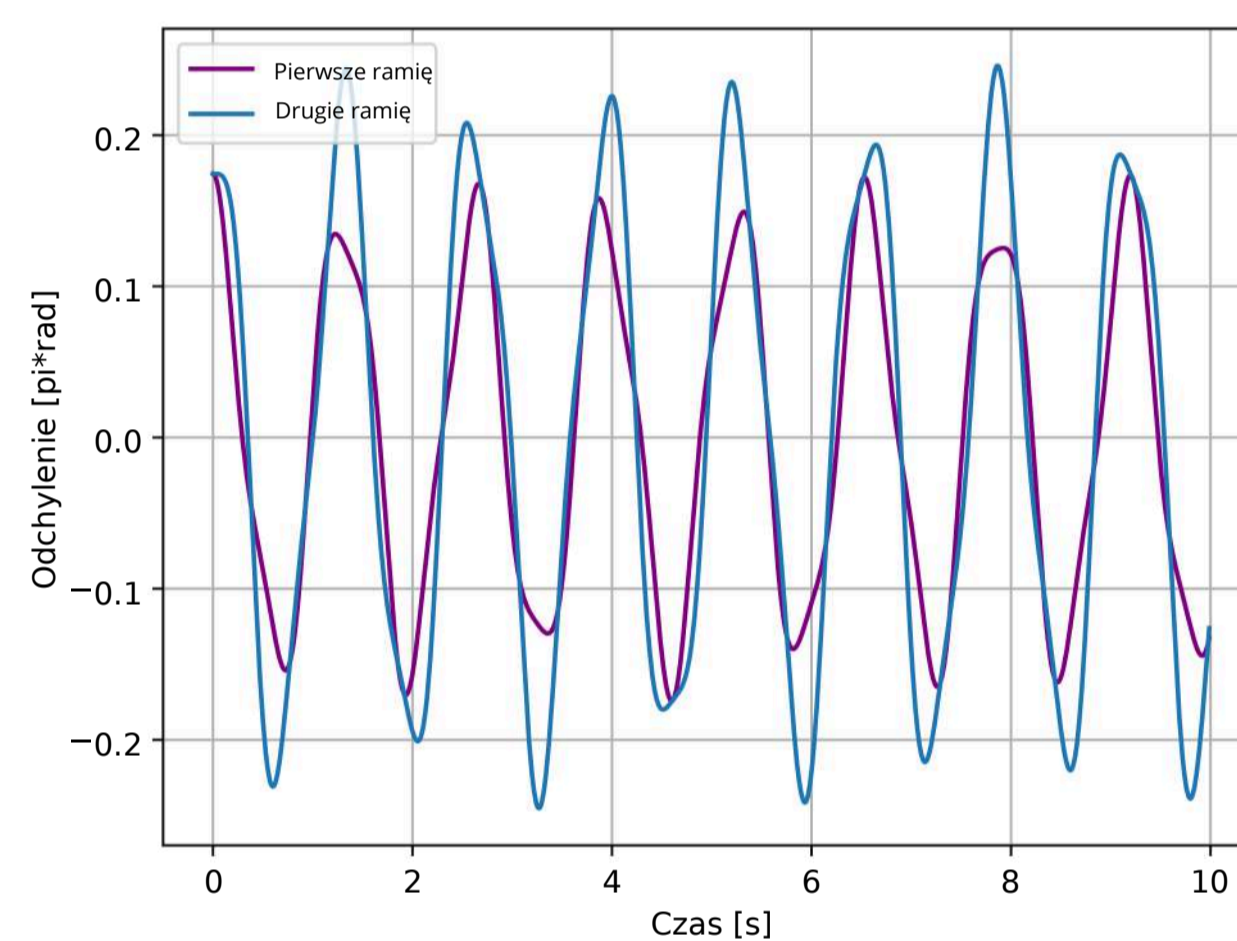
## ANALIZA

Do analizy zachowania wahadła podwójnego należało skorzystać z różniczkowych równań ruchu. W tym celu posłużyliśmy się algorytmami je rozwiązującymi: Eulera i Rungego-Kutty 4. rzędu. Algorytm Eulera jest najprostszym algorytmem rozwiązującym równania różniczkowe, ale w przypadku bardziej skomplikowanych układów lepszą precyzję gwarantują algorytmy wyższego rzędu takie jak RK4.

W symulacjach otrzymałyśmy wykresy przy użyciu obu algorytmów (wykres 1, wykres 2) i wyraźnie widzimy, że algorytm RK4 zwrócił dokładniejsze dane.

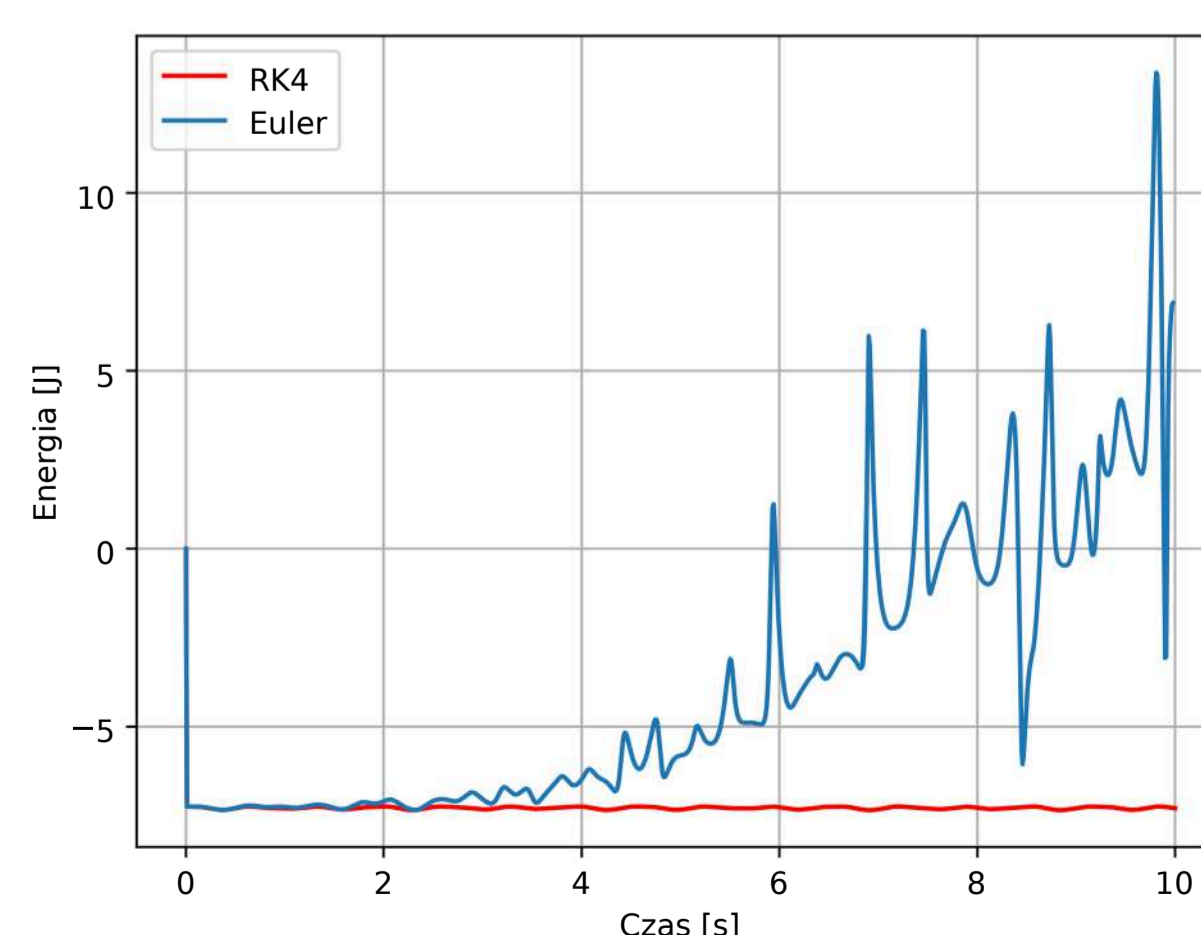


(wykres 1) algorytm Eulera



(wykres 2) algorytm Rungego-Kutty

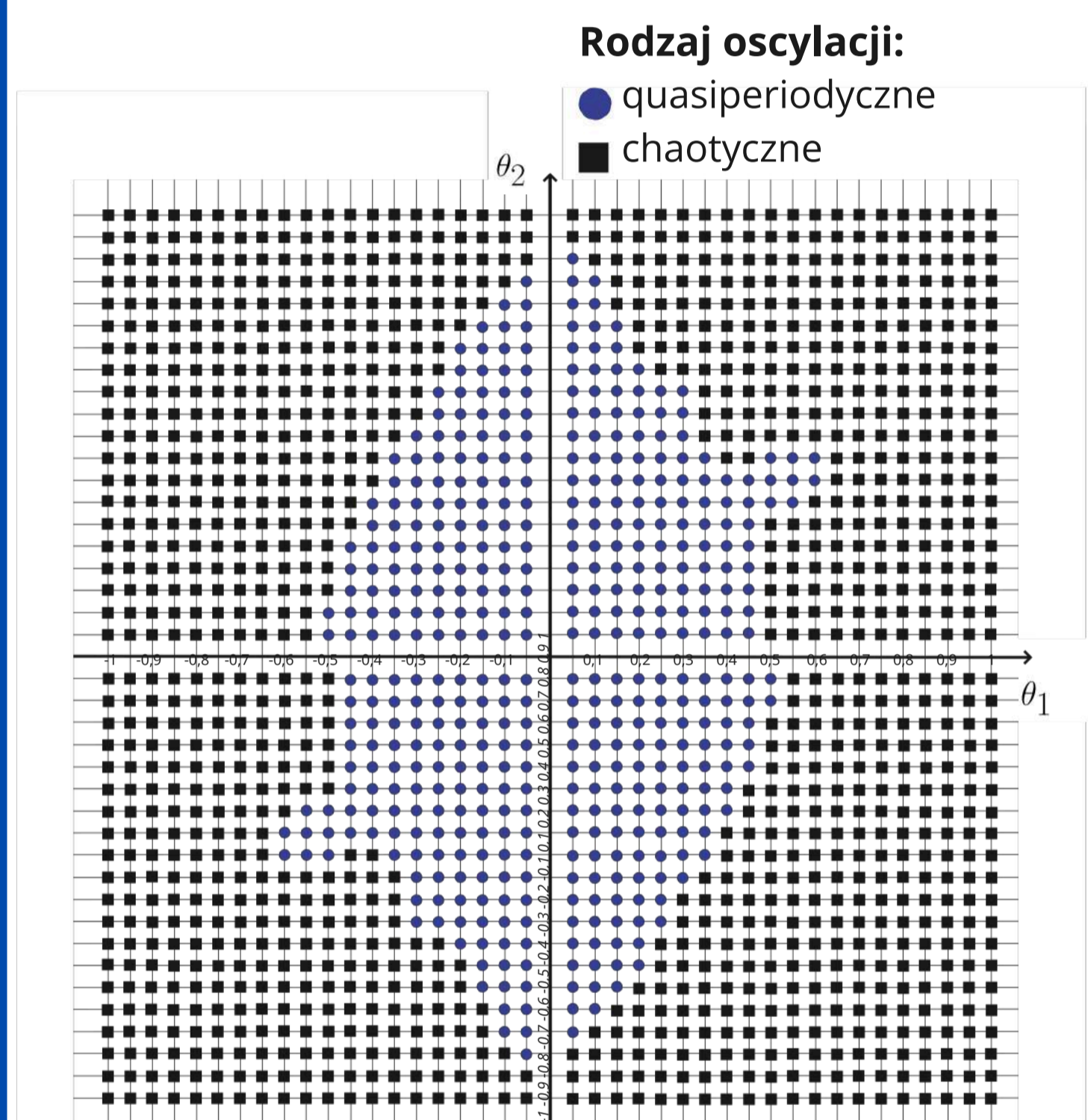
Dokładność naszej symulacji można łatwo odczytać z wykresu energii od czasu. Zgodnie z zasadą zachowania energii całkowita energia układu powinna być stała. Na poniższym wykresie widzimy, że algorytm RK4 popełnia mniejsze błędy.



(wykres 3) zależność energii całkowitej układu od czasu w obu symulacjach

## WNIOSKI

Podsumowaniem przeprowadzonych badań jest diagram bifurkacji, który przedstawia sposób oscylacji wahadła w zależności od położenia początkowych obu ramion. Dzięki temu wyznaczyłyśmy kąty odchylenia, dla których oscylacje wahadła są quasiperiodyczne (nieładnie okresowe) bądź chaotyczne (bez śladów regularności).



(wykres 4) diagram bifurkacji

## PODSUMOWANIE

Wahadło podwójne jest układem chaotycznym. Z analizy diagramu bifurkacji wynika, że większy wpływ na chaotyczność układu ma odchylenie pierwszego ramienia niż odchylenie drugiego. Przy małych odchyleniach ruch wahadła jest quasiperiodyczny i wraz ze wzrostem kąta odchylenia układ staje się bardziej chaotyczny. Jest to prawdziwe zarówno dla modelu z symulacji, jak i dla zbudowanego przez nas wahadła podwójnego.