Układy dynamiczne

Mateusz Fatz, Nikola Nikoleizig, Magdalena Pudełko, prowadząca: Ola Puchała

Wstęp

Jak zilustrować model wahadła matematycznego?
W naszym projekcie opiszemy ruch wahadła za pomocą równania różniczkowego i zobrazujemy go portretem fazowym. Przeanalizujemy ruch wahadła dla małych i dużych wychyleń.

Wyprowadzenie równania wahadła

Pierwszym krokiem do rozwiązania problemu wahadła matematycznego jest zapoznanie się z jego modelem.

Wahadło matematyczne to masa zwisająca na nieważkim pręcie, który się nie deformuje, czyli ruch jest możliwy wyłącznie po okręgu.

Na masę m działają dwie siły: siła reakcji i siła ciężkości. Siła reakcji ma kierunek wzdłuż pręta, a siła ciężkości działa pionowo w dół. Wypadkowa siła działa więc prostopadle do pręta. Wartość tej siły wyniesie:

$F = -mg \cdot \sin\theta$ gdzie g to przyśpieszenie ziemskie

W równaniu chcielibyśmy mieć funkcje jednej zmiennej, najlepiej kąta θ. Więc użyjmy momentu siły:

$M = F \cdot L$

Z drugiego prawa Newtona dla ruchu obrotowego mamy:

$\ddot{\theta} I = -mgL \cdot \sin\theta$

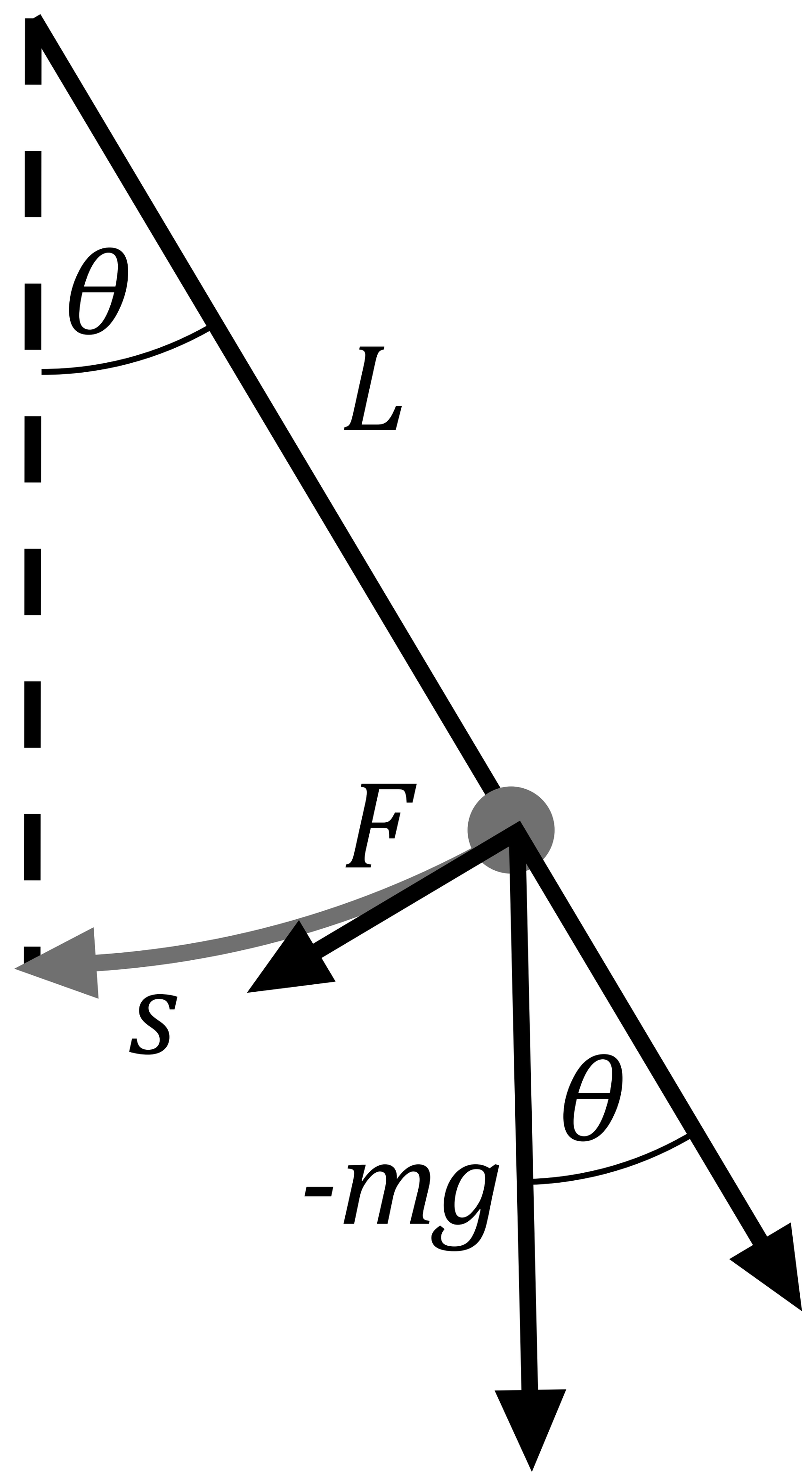
gdzie I to moment bezwładności wyrażony wzorem:

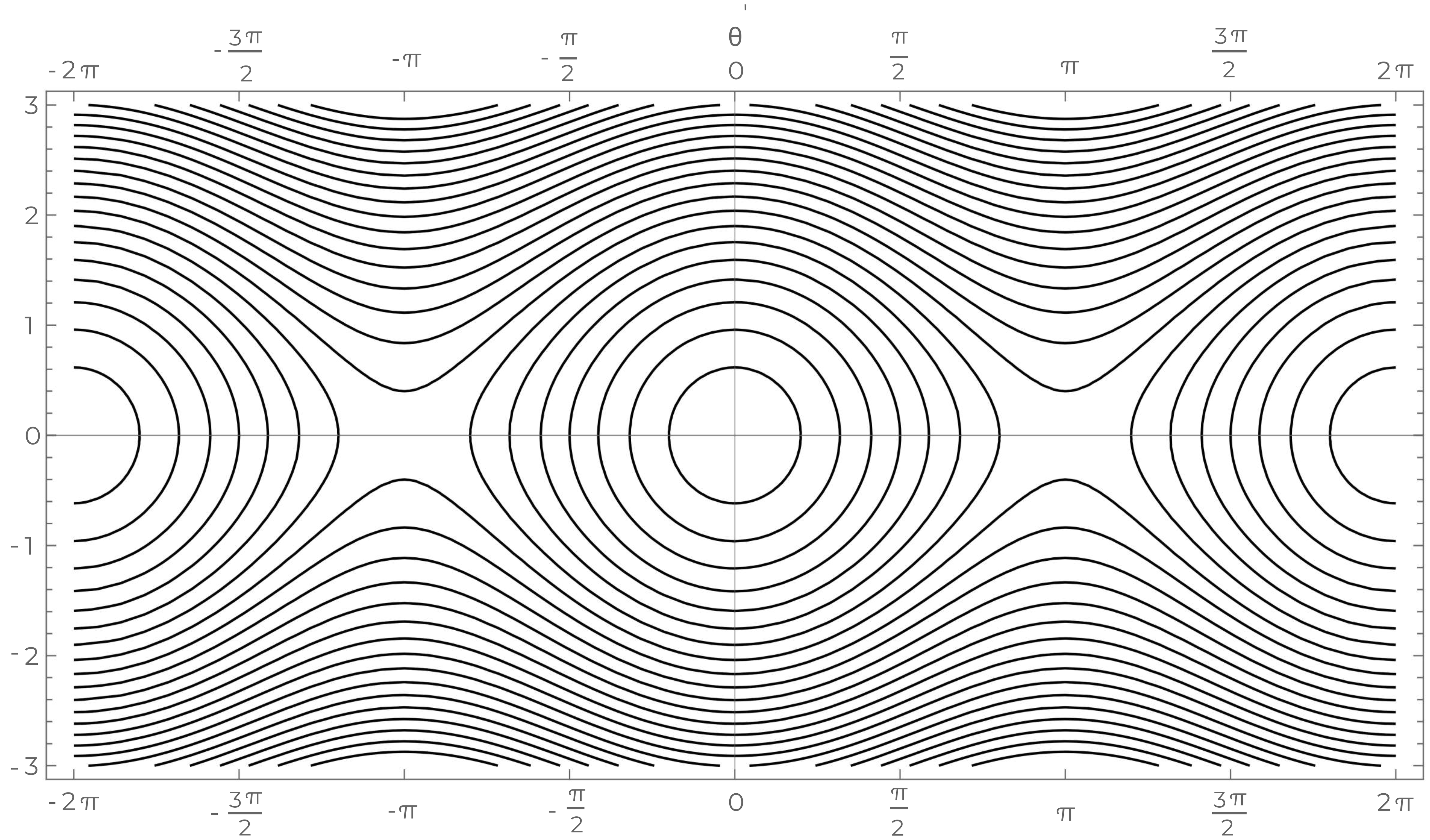
$I = mL^2$

Po podstawieniu i przekształceniu otrzymujemy równanie ruchu wahadła:

$\ddot{\theta} = -g/L \cdot \sin\theta$

Równanie jest nieliniowe, co utrudnia znalezienie rozwiązania. Zatem przedstawimy zależność prędkości od położenia za pomocą portretu fazowego.





Portret fazowy wahadła matematycznego w którym L=g, został wygenerowany w Mathematica

Portret fazowy

Równanie zawiera pochodną drugiego stopnia, a zatem wykres fazowy powinien pokazywać zależność prędkości kątowej od kąta. Równanie różniczkowe ma punkty stacjonarne tam, gdzie $\ddot{\theta} = 0$ i $\dot{\theta} = 0$. Wynika stąd, że są to punkty postaci (2πn, 0) i (2πn+π , 0), gdzie n to liczba całkowita, a współrzędne to $(\theta, \dot{\theta})$.Portret fazowy jest okresowy względem osi θ, więc możemy ograniczyć się do przedziału [-2π, 2π]. W pobliżu punktu stacjonarnego (2πn, 0) są małe wychylenia. Trajektorie zaś są okresowe i lokalnie są krzywymi zamkniętymi. Wiemy to, ponieważ w tym punkcie można to przybliżyć równaniem liniowym:

$\ddot{\theta} = -g/L \cdot \theta$

którego rozwiązanie można odgadnąć. Gdy będziemy oddalać się od punktu stacjonarnego (2πn, 0), to okręgi zaczną się deformować. W pobliżu drugiego punktu stacjonarnego trajektorie są hiperboliczne. W punktach (2πn, 0) ciało zwisa swobodnie i jest to punkt stabilny. W (2nπ+π, 0) masa jest najwyżej i jest to punkt niestabilny, ponieważ małe wychylenie ciała powoduje szybkie oddalenie się od tego punktu. W punktach (2n+1)π z prędkościami różnymi od zera wahadło zacznie się obracać i wraz ze wzrostem prędkości maleje amplituda zmian prędkości. Z analizy modelu wahadła wynika też, że można nadać taką prędkość i taki kąt, że wahadło zatrzyma się w punkcie niestabilnym.