
II Olimpijska Liga Astronomiczna

Kosmologia

VI seria: do 2 marca

Zadanie 1.

Wykaż, że w bardzo wczesnym wszechświecie (tzw. erze promieniowania) czynnik skali rośnie proporcjonalnie do pierwiastka czasu:

$$a \propto \sqrt{t} \tag{1}$$

Autorka: Zofia Lamęcka

Zadanie 2.

Zmierzone prędkości gwiazd na obrzeżach pewnej galaktyki są cztery razy większe niż byłyby zakładając, że galaktyka składałaby się tylko z materii świecącej. Wyznacz stosunek materii świecącej do ciemnej materii w tej galaktyce.

Autor: Ksawery Głowacki

Zadanie 3.

Zakładając, że wszechświat rozszerza się w taki sposób, że po dowolnym czasie t odległość między dwoma obiektami oddalonymi o L_0 równa jest $L(t) = L_0 \cdot e^{H_0 t}$. Oblicz czasy, w jakim sygnał świetlny pokonuje odległość między dwoma obiektami (a) leżącymi na przeciwległych brzegach Drogi Mlecznej, (b) oddalonymi o $D_2 = 1$ Gpc. Przyjmij, że $H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$.

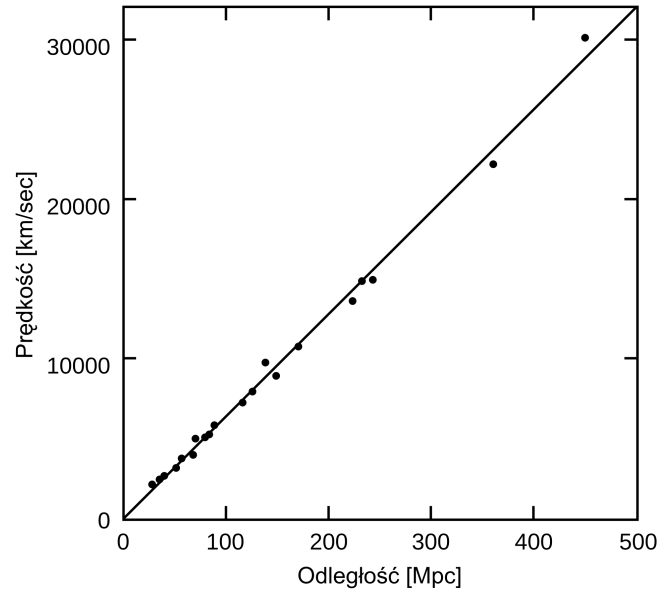
Jaka jest maksymalna odległość obiektu, którego światło możemy obserwować?

Mając dwa obiekty na niebie (ozn. A i B), oddalone od siebie o kąt α , każdy w odległości D_0 od Ziemi, wyznacz różnicę czasów między dotarciem do Ziemi dwóch sygnałów (sygnał 1 wysłany jest dokładnie w momencie, gdy odległość między Ziemią a obiektami wynosi D_0): sygnał 1 – pochodzący z obiektu A (wysłany izotropowo); sygnał 2 – odbity od obiektu B sygnał 1.

Autor: Michał Jagodziński

Zadanie 4.

Poniższy wykres przedstawia zależność prędkości galaktyk od ich odległości.



Rysunek 1: Caption

- Na podstawie wykresu oszacuj wartość stałej Hubble'a, oraz wiek wszechświata.
- Dla przypadku płaskiego wszechświata ($\Omega_0 = \Omega_m = 1$) znajdź dokładniejszy związek między stałą Hubble'a, a obecnym wiekiem wszechświata.

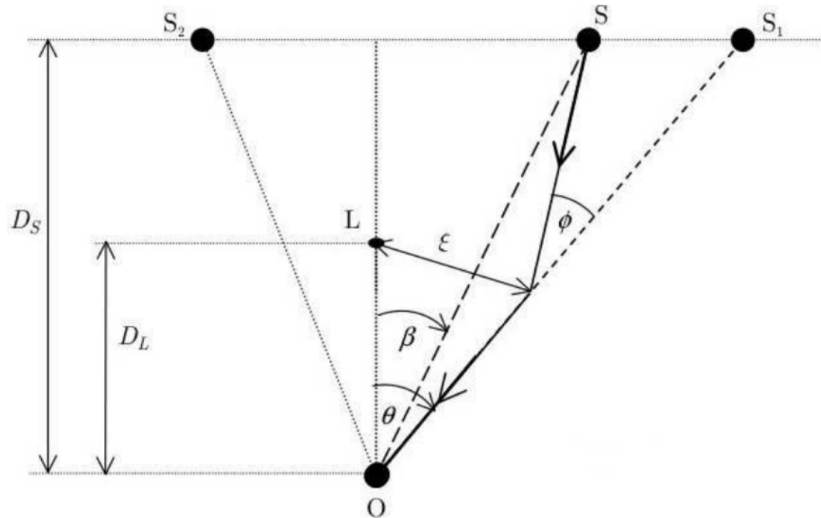
Autorka: Zofia Lamęcka

Zadanie 5.

Soczewkowanie grawitacyjne zostało przewidziane przez Einsteina 4 lata przed ogłoszeniem Ogólnej Teorii Względności w pracy "Trageser, W., von Meyenn, K., & Einstein, A. (1911). Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes". Praca ta rozważa obiekt o dużej masie, który zagina trajektorię światła i w efekcie zachowuje się jak klasyczna soczewka. Potwierdzenie istnienia tego zjawiska zostało przedstawione przez Sir Arthura Stanleya Eddingtona dopiero w 1919 roku po wcześniejszych, nieowocnych próbach innych zespołów oraz poprawce Einsteina do swoich przewidywań. Albert początkowo używał dosyć mocnych przybliżeń, a że warto go naśladować w niektórych kwestiach, to rozważmy obiekt o sferycznej symetrii i masie M działający jak soczewka. Parametr rozpraszania (impact parameter) oznaczamy jako ξ i mierzymy od środka obiektu. Równanie opisujące kąt zagięcia wiązki światła w tym przypadku ma postać:

$$\varphi = \frac{4GM}{\xi c^2}$$

W uproszczonym modelu parametr rozpraszania można traktować jako najkrótszą odległość między środkiem soczewki a przebiegiem danej wiązki światła. Na rysunku 2 masywny obiekt (działający jak soczewka) znajduje się w punkcie L. Promienie świetlne emitowane przez źródło S, ugięte przez soczewkę, są obserwowane przez obserwatora O jako obrazy S_1 i S_2 . Przyjmujemy, że kąty φ , β oraz θ są bardzo małe.



Rysunek 2: Geometryczny model soczewkowania grawitacyjnego

- (a) Dla szczególnego przypadku, w którym źródło jest idealnie ustawione względem soczewki (tj. $\beta = 0$), pokaż, że powstaje obraz w postaci pierścienia o promieniu kątowym, zwanym promieniem Einsteina θ_E , danego wzorem

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_S - D_L}{D_L D_S}}$$

- (b) Odległość Ziemi od gwiazdy wynosi około 50 kpc. Soczewka o masie jednego Słońca, znajdująca się na linii obserwacji jest oddalona od gwiazdy o 10 kpc. Oblicz promień kątowy pierścienia Einsteina utworzonego przez tę soczewkę zakładając, że Ziemia, gwiazda i środek geometryczny soczewki są ustawione w jednej linii.
- (c) Podaj rozdzielczość teleskopu kosmicznego Hubble'a (średnica lustra - 2,4 m). Czy jest on w stanie zaobserwować pierścień Einsteina z punktu (b)?

- (d) Na rysunku 2, dla izolowanego punktowego źródła S, soczewka grawitacyjna tworzy dwa obrazy S_1 oraz S_2 . Znajdź ich pozycje (θ_1 i θ_2), a odpowiedź wyraż w zależności od β oraz θ_E .
- (e) Znajdź stosunek $\theta_{1,2}/\beta$ (tj. θ_1/β lub θ_2/β) w zależności od η . $\theta_{1,2}$ oznacza tutaj każdą z pozycji obrazów z punktu (d), a η wyraża stosunek β/θ_E .
- (f) Znajdź wartości powiększeń $\Delta\theta/\Delta\beta$ w zależności od η dla $\theta = \theta_{1,2}$ (tj. dla $\theta = \theta_1$ lub $\theta = \theta_2$), przy założeniu, że $\Delta\beta \ll \beta$ oraz $\Delta\theta \ll \theta$.

Autor: Rafał Bryl