



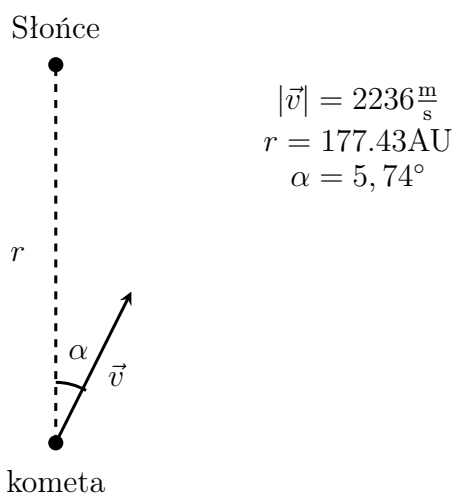
1 Mechanika Nieba

1. W pewnym momencie wektor prędkości komety obiegającej Słońce był taki jak na rysunku 1. Na jaką najmniejszą odległość zbliży się ona do Słońca i kiedy to nastąpi?

Pytanie bonusowe: O której komecie mowa?

Wskazówka: Materiał przydatny w trakcie rozwiązywania możesz znaleźć tutaj:

<https://www.youtube.com/watch?v=1Uz9NqDV5ZM>



Rysunek 1: Rysunek do zadania 1.

2. Asteroida 30 Urania krąży po orbicie o półosi wielkiej równej 2,367 AU i mimośrodzie równym 0,126. Sonda kosmiczna znajdującej się na niskiej orbicie ziemskiej, w płaszczyźnie ekliptyki, 400km nad powierzchnią. Przyjmując, że owa sonda uruchamia silnik dokładnie raz, oblicz o ile co najmniej musi się zmienić prędkość satelity, tak aby dokonała bardzo bliskiego przelotu przy asteroidzie. Opisz też w jakim ustawieniu względem Słońca i asteroidy należy wykonać ten manewr. Przyjmij że orbita Ziemska jest kołowa,

asteroida znajduje się w płaszczyźnie ekliptyki i czas wykonywania manewru jest pomijalny. Pomiń też wpływ grawitacyjny innych obiektów poza Ziemią i Słońcem. Potrzebne dane wyszukaj samodzielnie.

3. Kometę C/2023 P1 (Nishimura), która 12 września dokonała przelotu najbliższej Ziemi, odkryto 11 sierpnia 2023 roku. Jej współrzędne w układzie ekliptycznym wynosiły wtedy $\lambda_K = 104^\circ 58' 27,5''$, $\beta_K = -3^\circ 49' 18,6''$, prędkość radialna $v_r = -53,33 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, prędkość tangencjalna w długości ekliptycznej $\omega_\alpha = 1' 31'' \frac{1}{\text{h}}$, w szerokości ekliptycznej $\omega_\delta = 41,15'' \frac{1}{\text{h}}$, odległość od Ziemi $D = 258,751$ mln km. Wyznacz odległość kątową komety od Słońca w momencie jej peryhelium z punktu widzenia obserwatora umieszczonego w środku Ziemi. Załóż kołowość orbity Ziemi, pomiń wpływ ciał innych niż Słońce na ruch komety. Dane o pozycji Słońca w każdym dniu roku możesz znaleźć w Roczniku Astronomicznym bądź wielu innych dostępnych w internecie źródłach.
4. Tabelka poniżej przedstawia odległość kątową pomiędzy środkiem tarczy Słonecznej i Merkurym na przestrzeni kilku miesięcy:

Tabela 1: Elongacja Merkurego

Nr.	Data (HJD - t_0)	Elongacja	Nr.	Data (HJD - t_0)	Elongacja
1.	1, 137	16, 13°	13.	59, 581	-25, 02°
2.	4, 84	18, 4°	14.	63, 776	-24, 08°
3.	7, 674	19, 35°	15.	79, 618	-13, 01°
4.	11, 303	19, 42°	16.	87, 322	-12, 79°
5.	17, 044	16, 85°	17.	94, 563	5, 04°
6.	23, 479	10, 07°	18.	108, 359	18, 53°
7.	29, 377	1, 07°	19.	119, 044	26, 74°
8.	36, 192	-9, 86°	20.	123, 248	25, 02°
9.	41, 729	-17, 11°	21.	127, 211	27, 48°
10.	47, 692	-22, 22°	22.	129, 035	27, 81°
11.	53, 118	-24, 61°	23.	133, 553	27, 64°
12.	57, 914	-25, 19°	24.	139, 373	25, 88°

Na jej podstawie określ okres orbitalny Merkurego i ekscentryczność jego orbity. Wskaż też przybliżoną datę na przestrzeni kolejnych trzech lat, w której Merkury będzie najbliższej Ziemi. W obliczeniach załóż, że orbita Ziemska jest kołowa i współpłaszczyznowa z orbitą Merkurego.

2 Promieniowanie

5. Wyznacz zasięg ekosfery wokół Słońca, rozumianej jako taką strefę, że dowolna planeta, która by się w niej znalazła (niezależnie od albedo) miałaby temperaturę powierzchni pozwalającą na występowanie wody w stanie ciekłym. Załóż, że rozważana planeta jest ciałem doskonale szarym o jednolitej temperaturze i nie posiada własnego źródła ciepła. Omów zasadność przyjętych założeń oraz jak poszczególne z nich wpływają na wynik końcowy.
6. Dane są dwie gwiazdy optycznie podwójne: pierwsza o promieniu 2,4 promienia Słońca, znajduje się 25,4 parseków od Ziemi i emituje najwięcej światła na falach o długości 322 nm. Druga oddalona jest od nas o 25,6 parseków, ma promień równy 1,85 promienia Słońca, a maksimum emitowanego przez nią światła przypada na 352 nm. Przyjmując, że Słońca jasność wynosi $-26,74$ mag, a stała słoneczna jest równa $1361 \frac{W}{m^2}$ określ jasność tego układu podwójnego.
7. Na statku kosmicznym Atlantis o masie $10t$ znajduje się kula o masie $1kg$, w której zawartość pewnego nietrwałego pierwiastka X wynosi 3%. Masa jądra X to $221,049u$. Ulega ono rozpadowi na jądro innego pierwiastka o masie $217,033u$ i jądro helu o masie $4,002u$. Czas połowicznego rozpadu wynosi $T_{1/2} = 8h$. Statek napędzany jest Energetycznym Translatorem 3000, która zmienia 80% energii, uwolnionej w wyniku rozpadu jądra pierwiastka X, w energię kinetyczną statku. Podaj przewidywaną prędkość Atlantisa po upływie doby. Początkowo statek spoczywa.
8. Pewien teleskop zbierał dane o jasności obserwowanej m , paralaksie p i widmach gwiazd ciągu głównego, przesłoniętych przez pobliską, kulistą mgławicę o jednolitej gęstości. Wyznaczono też już punkt na sferze niebieskiej, w której znajduje się środek mgławicy i odległości katowe α poszczególnych gwiazd od niego. Wiadome jest, że gaz z którego zbudowana jest mgławica powoduje ekstynkcję $47 \frac{mag}{kpc}$. Co więcej, dogłębna analiza widma ujawniła przybliżone temperatury T owych gwiazd. Wyniki pomiarów zebrane są w tabelce poniżej. Na ich podstawie oblicz promień mgławicy i jej odległość od Ziemi.

Wskazówka: Dla gwiazd ciągu głównego o masie $M > 2M_{\odot}$ obowiązuje relacja $R^{4,4} \sim L$. Przydatne może się okazać też wykorzystanie Wegi jako gwiazdy porównawczej. Przyjmij, że ma ona masę $M_W = 2,14M_{\odot}$, temperaturę $T_W = 9464K$ i moc promieniowania $L_W = 40,12L_{\odot}$, której odpowiada absolutna wielkość gwiazdowa równa $0,71 [mag]$

Tabela 2: Dane o gwiazdach

Nr.	α [stopnie]	p [mas]	m [magnitudo]	T [K]
1.	7,43	0,75	16,35	9200
2.	2,52	0,54	16,42	12200
3.	9,4	0,65	13,75	10700
4.	7,01	0,47	14,19	14200
5.	4,59	0,85	15,39	11500
6.	12,13	0,68	11,00	10100

3 Układy podwójne i gwiazdy zmienne

9. Rozpatrujemy układ zaćmieniowy w którym zaćmienia zachodzą centralnie, składniki poruszają się po orbitach kołowych, a czas trwania zaćmień jest znacznie mniejszy od okresu orbitalnego. Rozstrzygnij, czy znając zmianę jasności Δm układu podczas jednego zaćmienia, czas trwania etapu częściowego zaćmienia (jednego z dwóch) t_p oraz czas trwania płaskiego dna t_d , można zawsze jednoznacznie określić, czy jest to minimum główne, czy wtórne. Jeśli nie zawsze, wyjaśnij, kiedy jest to możliwe, a kiedy nie.
10. Rozważmy dwie gwiazdy o stosunku mas $\frac{5}{7}$ stanowiące kołowy układ podwójny. Okres pełnego obrotu gwiazd wynosi T . Płaszczyzna układu leży w płaszczyźnie orbity ziemi. Gwiazdy głównie emitują falę elektromagnetyczną o pewnej, konkretnej, długości. Maksymalna długość tej fali, obserwowana z ziemi, wynosi λ_{max} , zaś minimalna λ_{min} . Wyznacz odległość pomiędzy gwiazdami. Pomiń efekty relatywistyczne.
11. Składniki gwiazdy zaćmieniowej oddalonej o $d = 20\text{pc}$ krążą po orbitach kołowych o inklinacji $i = 84^\circ$ w odległości $a = 27,5R_\odot$ od siebie. Promienie składników układu wynoszą odpowiednio $R_1 = 2R_\odot$ i $R_2 = 1,5R_\odot$, a ich temperatury $T_1 = 7000\text{K}$ i $T_2 = 6200\text{K}$. Wyznacz obserwowane wielkości gwiazdowe układu w trakcie maksimum oraz obydwu minimów.
12. Dla pewnej klasycznej cefeidy, znajdującej się w Wielkim Obłoku Magellana, przeprowadzono pomiary jej jasności oraz prędkości radialnej. Wynika z nich, że okres jej pulsacji wynosi 16,2935 dni, zaś jasność obserwowana zmienia się przedziale od 15,1 do 14,15 magnitudo. Minimum jasności przypada na fazę 0,7 (faza, czyli stosunek czasu jaki upłynął od ostatniego maksimum do okresu pulsacji). Wskaźnik barwy (B-V) przyjmuje wartość 0,5 magnitudo w maksimum oraz 0,92 magnitudo w minimum jasności. Prędkość radialna gwiazdy z kolei waha się od 120 do $170\frac{\text{km}}{\text{s}}$, zmierzonych odpowiednio w fazach 0,1 oraz 0,7. Punkty przegięcia na wykresie prędkości radialnej od czasu (czyli punkty, w których przyspieszenie radialne osiąga wartości ekstremalne) znajdują się w fazach 0,4 oraz 0,9 i odpowiadają wartości $145\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Na podstawie podanych informacji wyznacz promień gwiazdy w minimum oraz maksimum jasności, jak również oszacuj całkowity przedział zmian rozmiarów tej cefeidy.

Wskazówki: Jedną z zależności pomiędzy temperaturą efektywną ciała doskonale czar-

nego (wyrażoną w kelwinach) a wskaźnikiem barwy (B-V) jest równanie

$$T_{eff} = 4600 \left(\frac{1}{0,92(B - V) + 1,7} + \frac{1}{0,92(B - V) + 0,62} \right)$$

Dla cefeid klasycznych istnieje zależność pomiędzy ich okresem pulsacji P (wyrażonym w dniach) a średnią jasnością absolutną M_V , opisana wzorem

$$M_V = -2,388 \log P - 0,753$$

4 Trygonometria sferyczna

13. Na skutek precesji osi ziemskiej zmienia się położenie biegunów niebieskich na tle gwiazd, a w konsekwencji także gwiazdozbiory widoczne w ciągu roku z danej szerokości geograficznej. Dla obserwatora znajdującego się na szerokości geograficznej $\varphi = 50^\circ\text{N}$ określ:
- (a) które gwiazdozbiory będą przez dowolny okres czasu gwiazdozbiorami okołobiegunowymi w ciągu roku platońskiego,
 - (b) które gwiazdozbiory są zawsze ponad horyzontem niezależnie od położenia bieguna północnego na kole precesji,
 - (c) czy Syriusz będzie zawsze najjaśniejszą widoczną na nocnym niebie gwiazdą w ciągu roku kalendarzowego, a jeśli nie, to która gwiazda go w tym zastąpi i za ile lat to się stanie.

Każdą odpowiedź uzasadnij odpowiednim rozumowaniem/obliczeniami. Wszystkie niezbędne dane wyszukaj samodzielnie. Załóż brak ruchu własnego gwiazd.

Wskazówka: Pomocna może być mapa gwiazdozbiorów z zaznaczonymi ich granicami na tle siatki współrzędnych ekliptycznych.

14. Rozważmy satelitę, znajdującego się perfekcyjnie w punkcie Lagrange’a L1 i wykonującego zdjęcia Ziemi (Tak jak na przykład sonda DSCOVR) każdego dnia, regularnie o godzinie 12:00 czasu UTC. Opisz i wykonaj stosowny rysunek drogi, po której przesuwał się środek Ziemi na kolejnych zdjęciach.
15. Fala grawitacyjna została zaobserwowana przez KAGRA ($36^\circ 24' 43''\text{N}$; $137^\circ 18' 21''\text{E}$), a po upływie 0.01036 sekundy przez GEO600 ($52^\circ 14' 49''\text{N}$; $9^\circ 48' 30''\text{E}$). W momencie detekcji fali przez KAGRA lokalny czas gwiazdowy wynosił $t_\star = 02^{\text{h}}20^{\text{min}}$. Wyznacz zbiór punktów na sferze niebieskiej, będących możliwymi położeniami źródła sygnału.

Wskazówka: Zacznij od obliczenia odległości między KAGRA i GEO600 w linii prostej. Ile czasu światło potrzebuje na przebycie tej odległości? Dlaczego wynik różni się od różnicy czasowej między dwoma momentami obserwacji?

16. (a) Wyznaczyć odległość między dwoma gwiazdami mając ich współrzędne ekliptyczne równikowe równonocne i odległości od Ziemi:
- i. Betelgeza: $05^{\text{h}}55^{\text{m}}, +7^\circ 24', 197\text{pc}$
 - ii. Wega: $18^{\text{h}}37^{\text{m}}, 38^\circ 37', 7.7\text{pc}$
- (b) Używając wzorów na trójkąt sferyczny wyznaczyć równanie ekliptyki.

5 Optyka

17. Głównym czynnikiem wpływającym na szerokość linii spektralnych jest tzw. poszerzenie dopplerowskie, wynikające z ruchu cząsteczek gazu, których prędkość jest zależna od jego temperatury. Szerokość linii o długości fali λ , emitowanej przez cząstkę o masie m , znajdującej się w gazie o temperaturze T , dana jest wzorem

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Założmy, że dysponujemy zestawem obserwacyjnym złożonym z teleskopu, siatki dyfrakcyjnej o gęstości 500 linii na milimetr oraz kamery CCD o rozdzielczości 1280×960 pikseli, której matryca ma fizyczny rozmiar $6,4 \times 4,8$ mm. Teleskop jest skierowany na gwiazdę, której maksimum promieniowania przypada na długość fali $\lambda_{max} = 462$ nm. W jakiej odległości od siatki dyfrakcyjnej należy umieścić matrycę, aby szerokość linii H- α na zdjęciu widma pierwszego rzędu odpowiadała szerokości jednego piksela? O ile należy przesunąć matrycę względem środka siatki, aby linia ta wypadła na środku fotografii? Porównaj uzyskane odległości z tymi samymi przesunięciami obliczonymi dla warunku, aby całe widmo pierwszego rzędu w zakresie widzialnym (400-700 nm) mieściło się na szerokości matrycy.

Pozostałe niezbędne dane wyszukaj samodzielnie.

18. Soczewkowanie grawitacyjne słabe

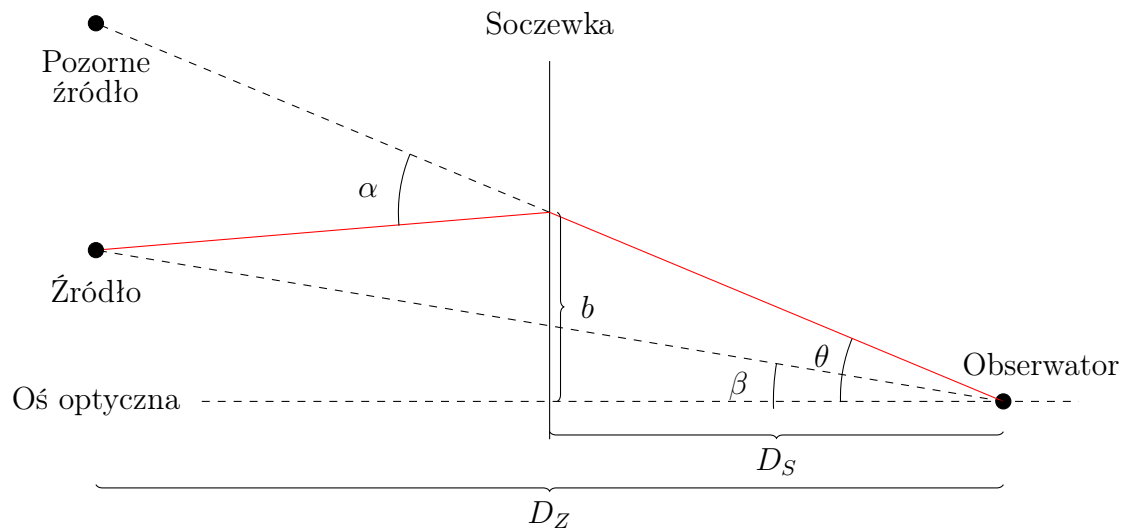
Zakrzywienie promieni światła w polu grawitacyjnym nazywamy soczewkowaniem. W tym zadaniu rozważamy gromadę galaktyk, działającą jako soczewka, oraz odległą galaktykę, będącą w tym przypadku źródłem, które podlega soczewkowaniu. Taki układ możemy przybliżyć płaską soczewką, przedstawioną na załączonym rysunku, w której kąt α , o jaki zmienia się kierunek biegu promienia światła przy przejściu przez soczewkę wyraża się wzorem:

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2},$$

gdzie α jest wyrażone w radianach, G to stała grawitacji, M to masa gromady galaktyk, b to odległość miejsca przejścia promienia światła przez soczewkę od jej środka (rysunek), a c prędkość światła.

Galaktykę odległą* o $D_Z = 200$ Mpc zaobserwowano w odległości kątowej $\theta = 25'21,15''$ od centrum gromady galaktyk o masie $M = 5 \cdot 10^{14} M_\odot$, odległej o $D_S = 130$ Mpc. Zaobserwowana galaktyka ma kształt koła o promieniu $\sigma = 0.1719''$.

- (a) Gdzie znajdowałaby się galaktyka na niebie, gdyby nie uległa ona soczewkowaniu przez gromadę galaktyk?
- (b) Jakie byłyby wtedy zaobserwowane: kształt, orientacja i rozmiar galaktyki na niebie? (Podaj wszystkie parametry pozwalające jednoznacznie to określić.)



Wskazówka W obydwu podpunktach polecam najpierw wyprowadzić końcowy wzór, a dopiero potem podstawić wartości liczbowe. Jest to dobra praktyka we wszystkich zadaniach, ale w tym szczególnie.

* W tym zadaniu wszystkie podane odległości są odległościami średnicy kątowej (*angular diameter distance*).

19. W warunkach dobrego seeingu ($1,5''$) prowadzone są obserwacje w świetle widzialnym przy użyciu teleskopu o światłosile równej $1/6,5$ i obiektywie o średnicy 20cm . W ognisku teleskopu umieszczona jest matryca CCD na którą pada rejestrowany obraz. Oblicz najmniejszą gęstość pikseli na owej matrycy, wymaganą, aby dwa punkty obserwowane wtedy przez teleskop łądowały na dwóch różnych pikselach.

6 Kosmologia

20. Rozważmy zjawisko teoretyczne parowania czarnych dziur.

Dla tego zjawiska przyjmuje się, że temperaturę czarnych dziur opisuje wzór:

$$T = 6,2 \cdot 10^{-8} \frac{M_{\odot} M}{},$$

a za promień czarnej dziury (promień Schwarzschilda) przyjmujemy;

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Przyjmij, że w chwili t_0 czarna dziura znajduje się w otoczeniu jedynie kosmicznego promieniowania tła odpowiadającego promieniowaniu ciała doskonale czarnego o temperaturze $2,73K$ (temperatura wszechświata).

a) Oblicz promień czarnej dziury, która w opisanej chwili pozostaje w równowadze (jej masa się nie zmienia).

b) Oszacuj jak długo owa czarna dziura będzie wyparowywać, zakładając rozszerzanie się wszechświata ze stałą Hubble'a $H_0 = 70 \frac{km/s}{Mpc}$.

Wskazówka: Rozważ jak zmienia się temperatura wszechświata w czasie - zauważ bowiem, że przy rozszerzaniu wszechświata długość fali fotonów się również zwiększa.

21. **Supernowa w odległej galaktyce.**

W pewnej galaktyce spiralnej G2 o przesunięciu ku czerwieni $z_2 = 3.98$ zaobserwowano wybuch supernowej typu Ia o jasności absolutnej w zakresie widzialnym $M_V = -19.5$ mag. Średnicę galaktyki oszacowano na $d \approx 30$ kpc, a supernową zaobserwowano w jednym z jej ramion spiralnych. Tuż obok na niebie znajduje się inna, bardzo podobna galaktyka spiralna G1 o przesunięciu $z_1 = 3.53$. Dyski obu galaktyk są w przybliżeniu współpłaszczyznowe. Centrum galaktyki G1 okrąża planeta zamieszkała przez obcą cywilizację. Orbita planety jest bardzo zbliżona do okręgu o promieniu $r \approx 9$ kpc i znajduje się w płaszczyźnie dysku galaktyki. Ekstynkcja międzygwiazdowa w zakresie widzialnym w obydwu galaktykach wynosi $A_V = 0.7$ mag/kpc.

Przypuśćmy, że w chwili gdy patrzymy na galaktykę G1, mieszkańcy tej planety zaobserwowali identyczny wybuch supernowej w galaktyce G2. To znaczy, że gdybyśmy mieli wystarczająco potężny teleskop, byłibyśmy w stanie zobaczyć, jak mieszkańcy tej planety właśnie obserwują tę supernową.

Jaki zakres wartości obserwowanej wielkości gwiazdowej supernowej mogą dostrzec mieszkańcy planety? Czy będą w stanie ją zaobserwować nieuzbrojonym "okiem" lub teleskopami? Przyjmij, że dla tego gatunku graniczna wielkość obserwowana to $+10$ mag, a teleskopy zwiększają tę wartość do $+28$ mag.

Przedyskutuj dodatkowe przyjęte założenia.

Wskazówki.

Prawo Hubble'a przestaje się sprawdzać przy z większych od około 0.60.

Przydatne może okazać się wyznaczenie zależności $H(z)$ stałej Hubble'a od przesunięcia ku czerwieni, tj. wartości stałej Hubble'a dla obserwatora żyjącego w momencie z .

Równanie Friedmanna we Wszechświecie zdominowanym przez materię barionową:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho,$$

gdzie H - stała Hubble'a (współcześnie $H_0 \approx 70 \text{ km}/(\text{s}\cdot\text{Mpc})$), ρ - gęstość materii we Wszechświecie.

Do obliczenia jasności supernowej użyj odległości jasnościowej D_L , przy czym zachodzi

$$D_L = (1 + z)D,$$

gdzie z - redshift, a D - odległość do obiektu wyznaczona z prawa Hubble'a.

22. Mikrofalowe promieniowanie tła, zwane także promieniowaniem reliktowym, jest pozostałością po tzw. erze rekombinacji, czyli okresie w którym energia promieniowania termicznego Wszechświata zmniejszyła się na tyle, by fotony nie były w stanie natychmiastowo jonizować powstających neutralnych atomów wodoru. Stan równowagi częściowo zjonizowanego gazu (złożonego z atomów, jonów oraz elektronów) o temperaturze T opisuje wzór Sahy, który dla wodoru przyjmuje postać:

$$\frac{n_p n_e}{n_h} = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

W powyższym równaniu przyjęto następujące oznaczenia:

- n_p , n_e , n_h – koncentracje protonów, elektronów oraz atomów wodoru, wyrażone w liczbie cząsteczek na jednostkę objętości,
- m_e - masa elektronu, $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$,
- k_B - stała Boltzmanna, $1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$,
- h - stała Plancka, $6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$,
- E_i - energia jonizacji atomu wodoru, $13,54 \text{ eV}$.

Na podstawie pomiarów wykonanych przez sondę WMAP ustalono, że aktualna gęstość Wszechświata jest równa tzw. gęstości krytycznej, co odpowiada koncentracji 5,9 protonów na metr sześcienny, jednak materia barionowa (czyli atomy) stanowi zaledwie 4,6% tej masy. Ponadto obecna temperatura mikrofalowego promieniowania tła została wyznaczona na $T_0 = 2,725 \text{ K}$. Wykorzystując podane informacje, oszacuj temperaturę Wszechświata w erze rekombinacji. Załóż, że składał się on wtedy jedynie z wodoru, a promieniowanie reliktowe zostało wyemitowane w momencie, gdy połowa atomów była w stanie zjonizowanym.

Wskazówki.

Temperatura promieniowania termicznego zamkniętego w rozszerzającym się równomiernie, izolowanym, sześciennym pudełku jest odwrotnie proporcjonalna do liniowego rozmiaru tego pudełka.

Równanie nieliniowe postaci $x = f(x)$ można próbować rozwiązać metodą iteracji, $x_{n+1} = f(x_n)$