
III Olimpijska Liga Astronomiczna

Kosmologia

Zadanie 1.

Rozważmy płaski, jednorodny i izotropowy Wszechświat wypełniony jednoatomowym gazem doskonałym o stałej masie. Przyjmujemy, że ekspansja przestrzeni opisana jest czynnikiem skali $a(\tau) \propto \tau^{\frac{2}{3}}$. Zakładając, że dla czasu τ_1 parametr Hubble'a wynosił $H(\tau_1) = 378 \text{ km/s/Mpc}$ a temperatura gazu $T_1 = 1600 \text{ K}$, oblicz temperaturę tego gazu dla τ_2 , gdy $H(\tau_2) = 67,5 \text{ km/s/Mpc}$. Przyjmij dla uproszczenia, że Wszechświat rozszerza się adiabatycznie.

Autor: Franciszek Hansdorfer

Zadanie 2.

Dla względnie nieodległych obiektów, takich że prędkość ucieczki $v = Hd$ jest znacznie mniejsza od prędkości światła ($v \ll c$) przybliżenie efektu Dopplera daje zależność:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = 1 + \frac{Hd}{c} \quad (1)$$

Aby otrzymać przesunięcie ku czerwieni odległych obiektów możemy rozważyć wiele małych fragmentów Δd dla każdego z których ($H\Delta d \ll c$). Całkowite przesunięcie ku czerwieni (dla odległości $d = \sum \Delta d_i$) jest iloczynem przesunięć ku czerwieni na każdym z fragmentów Δd_i .

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{n_1}} \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2}} \dots \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_e} = \prod_{i=1}^n (1 + H \frac{\Delta d_i}{c}) \quad (2)$$

Korzystając z powyższych faktów wyprowadź znany wzór:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_e} \quad (3)$$

gdzie a_0 i a_e to czynniki skali odpowiednio w momencie obserwacji i emisji.

Autorka: Zofia Lamęcka

Zadanie 3.

Czy istnieje orbita okołoziemska, na której czas własny umieszczonego zegara byłby równy czasowi własnemu zegara znajdującego się na powierzchni Ziemi? Odpowiedź podeprzyj odpowiednimi obliczeniami.

Autorka: Zofia Lamęcka

Zadanie 4.

Gromada Coma (Abell 1656) jest dużą gromadą galaktyk zawierającą ponad tysiąc galaktyk. Znajdź dyspersję prędkości oraz szacunkowy rozmiar tej gromady galaktyk. Podaj źródła danych. Na podstawie wyłącznie tych wielkości oszacuj zgrubnie masę gromady Coma. Następnie porównaj masę gromady do masy zwykłej materii zawartej w gromadzie.

Możesz przyjąć, że gromada Coma jest w przybliżeniu kulista. Do oszacowania masy zwykłej materii w gromadzie, przyjmij, że każda galaktyka w gromadzie Coma jest podobna do Drogi Mlecznej.

Autor: Michał Jagodziński

Zadanie 5.

Definiujemy parametr Hubble'a jako:

$$H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \quad (4)$$

Przyjmij, że parametr ten ma dziś wartość $H_0 = 67.8 \frac{km}{s \cdot Mpc}$. Równanie Friedmana można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda \quad (5)$$

Gdzie $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ są parametrami gęstości, gdzie $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ jest gęstością krytyczną. Czynniki skali a zmienia się w czasie jak $a \propto t^\alpha$. Wyprowadź α dla:

- $\Omega_r = 1, \Omega_m, \Omega_k, \Omega_\Lambda = 0$
- $\Omega_m = 1, \Omega_r, \Omega_k, \Omega_\Lambda = 0$

Przydatnym może być fakt, że gdy:

$$\frac{dy}{dx} = x^a$$

to:

$$y = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$$

Gdzie C to jakaś stała.

Obserwujemy galaktykę o przesunięciu ku czerwieni z . Jak zmieni jej się przesunięcie ku czerwieni po krótkim czasie Δt w zależności od α . Podaj wynik liczbowy dla $z = 1.5, \Delta t = 15 \text{ lat}$ i $\alpha = \frac{2}{3}$

Autor: Dawid Chudzik